Um caso de aplicação da Lógica *Fuzzy* – o Modelo Coppe-Cosenza de Hierarquia *Fuzzy*

Olga Moraes Toledo (CEFET-MG, COPPE – UFRJ), olga@cefetleo.com.br
Carlos Alberto Nunes Cosenza (COPPE, UFRJ) , cosenza@pep.ufrj.br

Resumo
As aplicações da Lógica Fuzzy se expandiram em várias direções. A interpretação através da lógica fuzzy de uma estrutura de dados é um caminho muito natural e intuitivamente plausível para a formulação e resolução de problemas. O Modelo Coppe-Cosenza de Hierarquia Fuzzy tem a Lógica Fuzzy em suas bases. Os sistemas fuzzy são capazes de utilizar, em sua modelagem, informações imprecisas e ambíguas e tornam este modelo capaz de trabalhar com uma vasta maioria de problemas de hierarquização que têm por característica a sua complexibilidade e a não exigência de precisão.
Palavras chave: Lógica Fuzzy, Hierarquia Fuzzy, Conceitos Básicos.

1- Introdução

Aristóteles, filósofo grego (384 - 322 a.C.), foi o fundador da ciência da lógica formal, e estabeleceu um conjunto de regras rígidas para que conclusões pudessem ser aceitas logicamente válidas. O emprego da lógica de Aristóteles leva a uma linha de raciocínio lógico baseado em premissas e conclusões. Como, por exemplo: se é observado que "todo ser vivo é mortal" (premissa 1), a seguir é constatado que "Sarah é um ser vivo" (premissa 2), como conclusão temos que "Sarah é mortal".

Conta-se que Epimênides de Creta disse, certa vez: "Todos os cretenses são mentirosos". Com isso, criou um problema aparentemente sem solução. Esse impasse pode ocorrer com paradoxos que dependem do uso de conceitos cujo domínio de referência inclui o conceito em si mesmo. No modelo cretense, a simples afirmativa "o que estou dizendo não é verdadeiro" gera uma contradição intrínseca: se a afirmativa é verdadeira, está demonstrada a sua falsidade; se é falsa, pode-se entender que contém a verdade. Esse é o paradoxo de Creta, retomado na era moderna por Groucho Marx: "Não me interessa pertencer a clubes que me aceitem como sócio".

Esses paradoxos foram expressos matematicamente por Godel e Tarski [Godel, 1962]. Segundo o teorema de Godel, um sistema complexo formalizado (postulado como um axioma) não pode se auto-avaliar. Isso significa que um sistema lógico de certa complexidade não pode fugir às suas contradições ocultas.

Acostumou-se a ouvir que o pensamento humano é lógico, e de fato o ser humano tenta remover de seu raciocínio tudo o que contrarie os padrões da lógica. Refere-se aqui à lógica formal, que pode ser considerada um representante do conhecimento clássico de mundo. Sua sistematização começou com Aristóteles e continuou até os lógicos modernos. Essa espécie de lógica tem influenciado a filosofia de modo relevante, e vem sendo adotada como modelo de raciocínio humano. Trata-se de um instrumento indispensável para fazer raciocínios operacionais em situações concretas.

Devido à sua complexidade, o pensamento requer uma multiplicidade de sistemas lógicos e mesmo não-lógicos. Na matemática, lida-se principalmente com uma lógica do tipo axiomático, isto é, diz-se que uma proposição é demonstrada quando é deduzida de outras, aceitas como verdadeiras. Desse modo, o raciocínio lógico-matemático tem muitas características tautológicas. A mente humana não pode ser vista como uma máquina de deduzir, uma espécie de engenhoca processadora de signos/símbolos. Ela deve estabelecer estratégias que tornem possível evidenciar tautologias a princípio não percebidas.

O homem deve descobrir o mundo e organizá-lo em sua mente. Na maior parte do tempo, apresentam-se dados nebulosos, vagos, contraditórios. Os especialistas, com suas assertivas competentes procuram evitar o espectro da imprecisão que ronda as ciências do conhecimento. Porém, em vez de ignorar ou tentar eliminar a imprecisão, é necessário aprender como lidar com ela. Entre o raciocínio lógico a não-lógico há áreas de sombra e mesmo buracos negros. Isso ocorre porque a lógica formal é baseada no silogismo, na dedução e na indução. Ela é tautológica e se baseia na confirmação (dedução) ou na generalização (indução) de suas premissas.

A lógica auto-organizacional se desenvolve à custa de erros. Avança a partir deles, fazendo novos progressos e criando estruturas organizacionais diferenciadas. Em 1965, o matemático Zadeh elaborou uma teoria à qual deu o nome de lógica não-formal ou lógica nebulosa ou lógica fuzzy (*fuzzy logic*). Os conjuntos *fuzzy* são uma generalização da teoria de conjuntos convencional idealizada como um caminho matemático para representar as incertezas da vida cotidiana [Zadeh, 1965]. A interpretação através da lógica *fuzzy* de uma estrutura de dados é um caminho muito natural e intuitivamente plausível para a formulação e resolução de variados problemas. Crianças rapidamente aprendem como interpretar e implementar instruções *fuzzy,* por exemplo, quando determinamos que elas devem ir para cama por volta das dez horas. Seres humanos assimilam e usam dados *fuzzy*, regras nebulosas, e informação imprecisa, pois é justamente como se tornam aptos a tomar decisões sobre situações que se mostram governadas pela casualidade.

As regras dessa lógica variam de acordo com as circunstâncias. Com a ajuda de arranjos nebulosos (*fuzzy sets*), e da heurística de modelos teóricos imprecisos, é possível uma aproximação às formas de raciocínio humano. Com essa espécie de lógica, que envolve axiomas não rigorosos, pode-se usar cadeias de inferência do seguinte tipo: numa primeira instância, "a", depois "b"; numa segunda instância, "a", depois "não-b"; numa terceira instância, "a", depois "mais ou menos b"; e assim por diante.

Uma das primeiras questões formuladas sobre esta lógica, e a que ainda se mostra mais freqüente, é a que opta por relacionar imprecisão com probabilidade, ou seja, seria a lógica *fuzzy* apenas um inteligente disfarce de modelos estatísticos. Certamente que não é, e para ilustrar, temos o exemplo a seguir. Considere o conjunto que contém todos os líquidos do universo como objetos e o subconjunto L como sendo o de todos os líquidos potáveis, ou apropriados para beber. Suponha que um viajante no deserto, sedento, depara-se com duas garrafas, A e B, e no rótulo da garrafa A está escrito seu grau de pertinência (μ) *fuzzy* com o conjunto L : μ (A $\in$ L) = 0,91 e no rótulo da garrafa B a probabilidade de pertencer a L : prob (B $\in$ L) = 0,91. Confrontado com o par de garrafas, devendo escolher apenas uma para beber e familiarizado com os conceitos básicos da lógica *fuzzy* ele imediatamente entende que a garrafa A pode conter , por exemplo, água do pântano ou colhida diretamente de um rio, mas não deve conter líquidos como ácido clorídrico. O grau de pertinência 0,91 significa que o conteúdo de A é “razoavelmente similar” aos líquidos perfeitamente potáveis, como água pura. Por outro lado, a probabilidade de B ser potável igual a 0,91 significa que depois de vários experimentos, o conteúdo de B foi estimado em potável em 91% dos testes. Neste caso, a chance de o conteúdo de B ser desagradável e possivelmente letal é de uma em dez. Então, o viajante deve optar por beber água do pântano, escolhendo a garrafa A .

Em resumo, este exemplo mostra que os dois tipos de modelos possuem filosoficamente diferentes tipos de informação: graus de pertinência *fuzzy* representam similaridades de objetos para definir propriedades imprecisamente e possibilidades que contêm informações sobre freqüências relativas.

Com base nos conceitos até agora considerados, pode-se dividir o pensamento em dois tipos: concreto e difuso. O concreto é apoiado pela lógica formal e tenta ser exato. Procura eliminar o erro, a desordem. a ambigüidade, a imprecisão e a contradição. O pensamento difuso é aproximativo, nebuloso, tenta lidar com a imprecisão, a contradição e a ordem/desordem natural das coisas. Procura pensar simultaneamente em ordem/desordem /organização, por meio de processos lógicos e não-lógicos.

A Lógica *Fuzzy* está vocacionada para a manipulação de conceitos mal definidos utilizando-se de variáveis lingüísticas no lugar de variáveis numéricas. E outro equívoco comum sobre os modelos *fuzzy* tem sido a de que eles oferecem uma substituição aos modelos baseados em lógica formal, ou probabilísticos. De fato, todo conjunto "crisp" está contido em um *fuzzy*, mas não o inverso.

A introdução do uso da lógica *fuzzy* permite ao modelo a utilização simultânea de variáveis qualitativas e quantitativas sendo capaz de gerar resultados quantitativos a partir de dados qualitativos. Segundo Zadeh, quanto maior a complexibilidade de um sistema, maior é a eficiência de um sistema em lógica *fuzzy*, em detrimento de outros métodos que não podem ser modelados a partir de informações imprecisas ou ambíguas, fig 1.1.

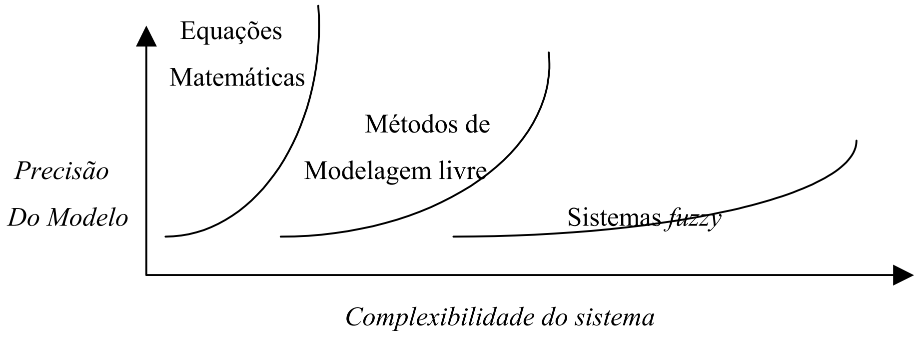

Fig. 1.1 – Complexibilidade de um sistema em função da precisão do modelo

2- O Modelo de Hierarquia *Fuzzy*

O Modelo de Hierarquia *Fuzzy* é, de um modo geral, um modelo de alocação de recursos que avalia o nível de satisfação de um conjunto de atributos/fatores necessários a um determinado projeto ou solicitados por ele em contraponto a disponibilidade destes atributos/fatores por diferentes alternativas. O grau de satisfação é medido através da comparação da importância de cada fator para o projeto e a quantidade e qualidade da disponibilidade deste fator em cada alternativa. Tem-se que ressaltar também que, obedecendo aos pressupostos do modelo voltados para a hierarquização das alternativas, o modelo não permite a penalização de uma alternativa que não disponha de um fator não solicitado, ou aquela que dispõe de mais fatores que os solicitados, explicitando sua riqueza adicional, podendo atender a outras solicitações e capaz de gerar economias externas.

A maior utilidade deste método é a tomada de decisão entre diferentes perfis de diferentes graus de importância aos fatores gerais e específicos, com elevado número de alternativas.

Considere $F=\{f_i \mid 1,\dots,n\}$ como um conjunto finito de atributos/fatores denotado genericamente como f. Então o conjunto *fuzzy* $\tilde{A}$ em f é um conjunto de pares ordenados $\tilde{A} = (f, \mu_{\tilde{A}}(f) \mid f \in \bar{r})$, onde $\tilde{A}$ é a representação *fuzzy* da Matriz de Solicitação $A=(\mu_{ij})_{hxm}$ e,

$\mu_{\tilde{f}}$ é a função de pertinência representando o grau de importância dos fatores: Crítico, Condicionante, Pouco Condicionante e Irrelevante.

De forma análoga, seja $\tilde{B} = \{ (f, \mu_{\tilde{B}}(f))\ f \in F\}$ onde $\tilde{B}$ é a representação *fuzzy* da Matriz de Disponibilidade B, onde $\mu_{\tilde{B}}$ (f) é uma função de pertinência representando os níveis dos fatores disponibilizados pelas diversas alternativas: Superior, Bom, Regular e Fraco.

Para cada projeto, as variáveis lingüísticas podem ser adequadas, determinadas através da hierarquia pretendida.

O conjunto $\tilde{A}$ não possui os elementos, apenas explicita os f_i's desejados, pertencentes apenas a $\tilde{B}$, definindo os seus contornos: escalas, níveis de qualidade, etc, sob o ponto de vista da Lógica *Fuzzy*.

A matriz $\tilde{B}$ que contém os f_i's atende $\tilde{A}$ por aproximação. O f_1 do conjunto $\tilde{A}$ não necessariamente é igual ao f_1 disponível em $\tilde{B}$.

Então teremos a matriz de Solicitação dos fatores pelos projetos ou das necessidades dos fatores em relação ao projeto.

Fij Solicitação dos Fatores pelos Projetos

	f_1 w_1	f_2 w_2	...	f_j w_j	...	f_n w_n
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1j}	...	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2j}	...	a_{2n}
...	...	...	...	...	...	...
A_i	a_{i1}	a_{i2}	...	a_{ij}	...	a_{in}
...	...	...	...		...	...
A_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mj}	...	a_{mn}

Onde :

$A_1, A_2,...,A_m$ é o conjunto de atributos solicitados pelos projetos ou necessários a eles;

$f_1, f_2,..., f_n$ é o conjunto de fatores;

$w_1, w_2, ..., w_n$ é o grau de importância de cada fator para o conjunto do projeto;

a_{ij} = coeficiente *fuzzy* do atributo i , com relação ao fator j.

E também a Matriz de Disponibilidade dos fatores para as Alternativas, que é a matriz que determina o coeficiente *fuzzy* destes fatores em relação a sua disponibilidade para cada alternativa.

Fij Disponibilidade dos Fatores para as Alternativas

		B_1	B_2	...	B_k	...	B_m
f_1	w_1	b_{11}	b_{12}	...	b_{1k}	...	b_{1n}
f_2	w_2	b_{21}	b_{22}	...	b_{2k}	...	b_{2k}
...	...	...	...	...	...	...	...
f_j	w_j	b_{j1}	b_{j2}	...	b_{jk}	...	b_{jn}
...	...	...	...	...	...	...	...
Fn	w_n	b_{n1}	b_{n2}	...	b_{nk}	...	b_{nm}

Onde:

$B_1, B_2,..., b_m$ é o conjunto de alternativas;

$w_1, w_2, ..., w_n$ é o grau de importância dos fatores os projetos;

$f_1, f_2,..., f_n$ é o conjunto de fatores;

b_{jk}: coeficiente *fuzzy* da alternativa k, com relação ao fator j.

O próximo passo é a operação entre as matrizes. Seja então a matriz $\tilde{C} = \tilde{A} \otimes \tilde{B} = (\tilde{c}_{ik})_{hxm}$ a matriz representativa do agregado das comparações de Solicitação/Disponibilidade de cada fator. Então o produto $\tilde{a}_{ij} \otimes \tilde{b}_{jk} = \tilde{c}_{ik}$, para dois elementos genéricos $\tilde{a}_{ij}$ e $\tilde{b}_{jk}$, é executado através do seguinte operador:

Disponibilidade de fatores (S)

	$\tilde{a}_{ij} \otimes \tilde{b}_{jk}$	0	...	1
Requerimento Dos Fatores	0	0^+		0^{++}
	...		1	
	1	0		1

Onde:

$\tilde{c}_{ik}$ é o coeficiente *fuzzy* da alternativa k com relação ao projeto i e, $0^+ = 1/n!$ e $0^{++} = 1/n$ (n= número de fatores considerados), são as quantidades limites e definidos como ínfimo e pequenos valores (>0). Na realidade, há um infinito número de valores $\tilde{c}_{ik}$ no intervalo [0,1];

n= número de fatores considerados;

se $\tilde{a}_{ij} = \tilde{b}_{jk}$, o indicador será igual a 1;

se $\tilde{b}_{jk} > \tilde{a}_{ij}$ o coeficiente derivado é maior do que 1;

se $\tilde{a}_{ij} > \tilde{b}_{jk}$ o coeficiente *fuzzy* é igual a zero;

se não há requerimento por um determinado fator, mas existe disponibilidade, os valores *fuzzy* são aqueles incluídos no intervalo $[0^+, 0^{++}]$.

A matriz de resultados (Δ) apresenta os índices que indicam se todos os fatores requeridos por determinado projeto estão sendo atendidos pelas alternativas em estudo e representa todas as possibilidades do projeto em relação a cada alternativa. Definido como :

$\Delta = [\ \delta_{ik}\ ]$, representa índices em relação aos fatores requeridos, ou seja, o elemento δ_{ik} representa o índice dos fatores satisfeitos na adequação do projeto i na alternativa k. Então, estes índices terão o seguinte significado com relação aos seus valores:

$\delta_{ik} = 1$: a alternativa k atende ao requerimento no nível pretendido;

$\delta_{ik} < 1$: pelo menos um fator requerido não foi atendido adequadamente;

$\delta_{ik} > 1$: a alternativa k oferece mais condições do que o requerido.

3- Conclusão

O Modelo de Hierarquia *Fuzzy* é um modelo científico baseado em lógica *fuzzy*, cujos dados serão compilados de modo eficiente e, seguramente, os resultados indicarão quais os pontos que irão encontrar melhor adequação para a atividade ou evento estudado , dentro das condições especificadas no requerimento e mapeadas segundo as alternativas pesquisadas, ou seja dentro da hierarquia pretendida.

O sistema não é restrito a aplicações de estratégias futuras, podendo também ser empregado para confirmar ou monitorar situações já estabelecidas. É viável também a simulação de alterações nos dados para prospectar novas configurações de alternativas.

Vale ressaltar que o principal diferencial do Modelo é a incorporação de variáveis externas à análise puramente econômica do projeto em questão. Sendo, portanto, uma ferramenta de apoio à decisão única capaz de reunir em um só modelo variáveis qualitativas e quantitativas, facilitando seu uso, podendo ser adequado às especificidades de cada projeto.

Portanto, abre-se um infindável leque de aplicações, onde a maior preocupação do analista de projeto deve ser a formatação do sistema, de modo a garantir a consistência e confiabilidade dos resultados.

4- Referências

BEZDEK, J.C., 1993. – "*Fuzzy* Models : What are they, and Why?"- , IEEE Transactions on *Fuzzy* Systems, vol.1, no.1, pp.1-5

COSENZA, C. A. , 1981. - "A Industrial Location Model"- Working paper, Martin Centre for Architctural and Urban Studies, Cambridge University.

COSENZA, C.A., 1998. "Localização Industrial : Delineamento de uma Metodologia para a Hierarquização das Potencialidades Regionais", COPPE/UFRJ.

COSENZA, C.A et alii ,1977.–"Localização Industrial no Novo Estado do Rio de Janeiro"- Rio de Janeiro, Relatório Final do Projeto COPPETEC ET – 466/75, COPPE/UFRJ.

GERTNER, Rosane K. , 2000. "A Decisão de Localização Industrial em Mercados Globalizados: Uma Aplicação do Modelo Cosenza em Empresas do Setor Automobilístico instaladas no Brasil"- Rio de Janeiro, Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ.

GÖDEL, K. 1962. *On formally undecidable propositions*. Nova York: Basic Books

LIMA, F. R. , 1993.- "Estudos de Localização Industrial: Criação de um Sistema de Análise Baseado em Modelos Icônicos Gerados por Aplicações da Computação Gráfica Associadas a Banco de Dados Relacional" - Rio de Janeiro, Tese de Doutorado, COPPE / UFRJ.

ROSS, Timothy J, 1995. – "*Fuzzy* Logic with engineering applications" - , Mc Graw Hill , USA.

ZADEH, Lofti A., 1965 -"*Fuzzy* Sets" - , Information and Control, vol.8, pp. 338-352.